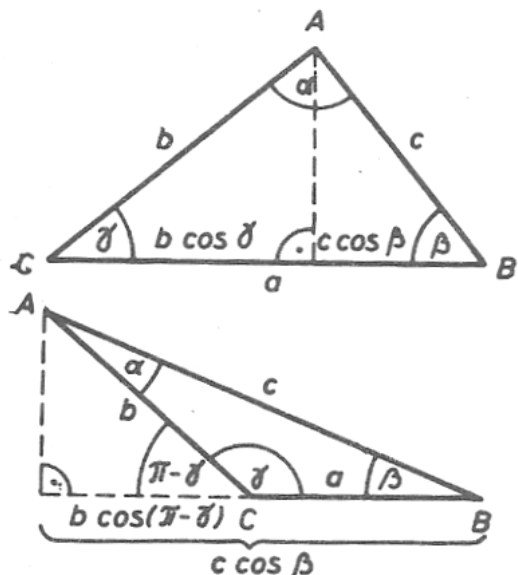


A koszinusz - tételről

A síkháromszögekre vonatkozó koszinusz - tételt középiskolai tanulmányainkból jól ismerjük. Bizonyítása Pitagorász - tétellel, illetve vektorosan sok helyen megtalálható; ld. pl.: [1], [2]! Most két, kevésbé gyakran előforduló bizonyítást mutatjuk be.

1. Bizonyítás – [2].



1. ábra

Az 1. ábra – forrása: [2] – szerint fennállnak az alábbi vetületi összefüggések, a derékszögű háromszögekre vonatkozó képleteket alkalmazva, $0 < \gamma < 180^\circ$ esetén:

$$a = b \cdot \cos \alpha + c \cdot \cos \beta; \quad (1)$$

$$b = c \cdot \cos \alpha + a \cdot \cos \gamma; \quad (2)$$

$$c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha. \quad (3)$$

Most szorozzuk meg a fenti egyenleteket rendre a - val, b - vel, (- c) - vel! Ekkor:

$$a^2 = a \cdot b \cdot \cos \gamma + a \cdot c \cdot \cos \beta; \quad (4)$$

$$b^2 = b \cdot c \cdot \cos \alpha + a \cdot b \cdot \cos \gamma; \quad (5)$$

$$-c^2 = -a \cdot c \cdot \cos \beta - b \cdot c \cdot \cos \alpha. \quad (6)$$

Most adjuk össze a (4), (5), (6) egyenleteket! Ekkor:

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma,$$

innen pedig az ismert alakú

$$\underline{\underline{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}} \quad (7)$$

összefüggés adódik. Úgy tűnik, ez az egyik legegyszerűbb levezetés.

2.) Bizonyítás – [3].

A (3) egyenlet szerint:

$$c = b \cdot \cos \alpha + a \cdot \cos \beta, \quad (3 / 1)$$

ehhez vegyük hozzá az 1. ábráról is leolvasható

$$b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta \quad (4)$$

összefüggést!

Most emeljük négyzetre (3 / 1) mindkét oldalát! Ekkor:

$$c^2 = b^2 \cdot \cos^2 \alpha + a^2 \cdot \cos^2 \beta + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta. \quad (5)$$

Ezután az ismert trigonometriai összefüggéssel alakítsuk tovább (5) - öt! Ekkor:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 \cdot (1 - \sin^2 \alpha) + a^2 \cdot (1 - \sin^2 \beta) + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta = \\ &= a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - b^2 \cdot \sin^2 \alpha - a^2 \cdot \sin^2 \beta. \end{aligned} \quad (6)$$

Most (4) szerint:

$$b^2 \cdot \sin^2 \alpha = a^2 \cdot \sin^2 \beta = (a \cdot \sin \beta) \cdot (b \cdot \sin \alpha) = a \cdot b \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta, \quad (7)$$

így (6) és (7) - tel, valamint az ismert trigonometriai összefüggéssel:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = \\ &= a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) = \\ &= a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha + \beta). \end{aligned} \quad (8)$$

Ámde a háromszög szögeire fennáll, hogy

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad (9)$$

így (9) - ből:

$$\alpha + \beta = \pi - \gamma. \quad (10)$$

Ezután (8) és (10) - zel:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\pi - \gamma); \quad (11)$$

de

$$\cos(\pi - \gamma) = -\cos \gamma, \quad (12)$$

így (11) és (12) - vel:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma \quad (13)$$

adódik, egyezésben (7) - tel.

Irodalom:

[1] – <http://hu.wikipedia.org/wiki/Koszinusztétel>

[2] – Szerk. Gáspár Gyula: Műszaki matematika - I. kötet
Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.

[3] – N. I. Muszhelisvili: Kursz analityicseszkoy geometrii
Vüzsaja Skola, Moszkva, 1967.

Összeállította: Galgóczi Gyula
mérnökstanár

Sződliget, 2010. február 12.